

Vektoranalys - några identiteter.

①

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \mathbf{F} = 0 & \text{solenoidal} \\ & \text{(divergensfri)} \\ \operatorname{curl} \mathbf{F} = 0 & \text{irrotational} \\ & \text{(rotationlös)} \\ & \text{fri} \end{array} \right.$$

Notera: Om $\mathbf{F} = \nabla \phi \Rightarrow \nabla \times \mathbf{F} = 0$

* varje ~~rotationst~~ vektorfält är konservativ rotationst.

$$\text{Om } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A} \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{F} = 0$$

* varje Rotation av varje vektorfält är solenoidal.

Sats 4 kap. 16.2

$\mathbf{F}$ glatt vektorfält på en enkelt sammanhängande domän D . Om $\mathbf{F}$ uppfyller $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ så är $\mathbf{F}$ konservativ

$$\mathbf{F} = \nabla \phi.$$

Exempel

②

$$F(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j}$$

Vektorfält definierat på hela $\mathbb{R}^2$ förutom
origo $(x, y) = (0, 0)$.

Notera att:

$$\nabla \times F \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

$$= \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$- \left[-\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right]$$

$$= \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{-x^2 - y^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

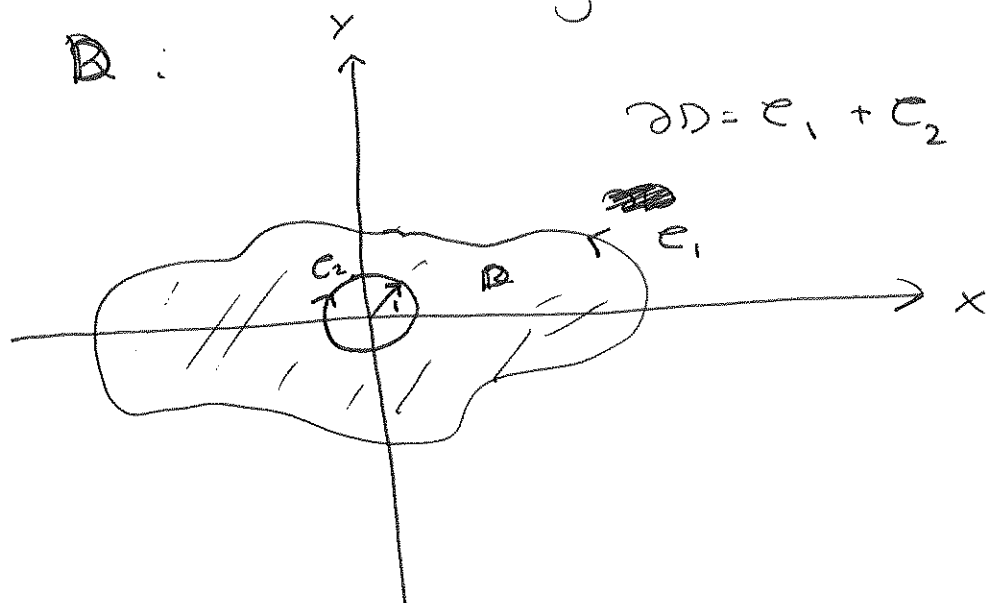
Är F då konservativ?

Det beror på domänen.

Enligt Green's sats har vi

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA = \oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Antag först att origo inte
tillhör D :

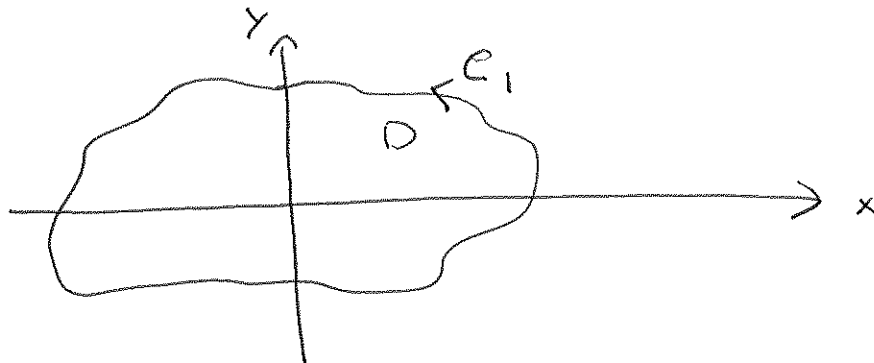


I detta fall gäller Greens sats:

$$\iint_D \underbrace{\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)}_{=0} dA = 0$$

$$\oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \oint_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

Men hur skall vi tolka detta
om origo tillhör D ?



Für den letzten Reibungssatz kann wir das
schrägen:

$$\oint_{C_1} F \cdot dr = - \oint_{C_2} F \cdot dr$$

Wir können leicht berechnen integral über C_2 :

$$r(t) = \cos t \, i + \sin t \, j$$

$$F(r(t)) = \frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \, i + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \, j = -\sin t \, i + \cos t \, j$$

$$\Rightarrow \oint_{C_2} F \cdot dr = - \int_0^{2\pi} F(r(t)) \cdot \frac{dr}{dt} \, dt$$

$\nearrow$
 orientiert
 nach rechts

$$= - \int_0^{2\pi} (-\sin t \, i + \cos t \, j) \cdot (-\sin t \, i + \cos t \, j) \, dt$$

$$= - \int_0^{2\pi} (\underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{=1}) \, dt = -2\pi$$

Vi drar där för slutet

5

$$\oint_{C_1} F \cdot dr = +2\pi$$

Om vi summerar allt så
har vi visat:

$$\oint_{\partial D} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = \begin{cases} 0 & \text{om } (0,0) \notin D \\ & \text{Green's sats gäller.} \\ & \text{D antag som tidigare} \\ & \text{F konservativ} \\ 2\pi & \text{om } (0,0) \in D \\ & \text{Green's sats gäller ej.} \\ & \text{F ej konservativ} \end{cases}$$

I fall 2 är alltså F väg-beroende och ej konservativ